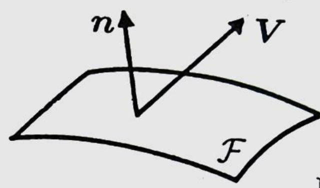
6.3. Vektorfelts flux og divergens. Gauss' sætning

Fluxen

En vektorfunktion kan, som det fremgår af § 5.1 og § 5.5, integreres koordinatvis over en flade $\mathcal{F}$. Ved vigtige anvendelser indgår vektorfeltet dog på en anden måde, idet man først projicerer vektorfeltet ind på fladens normal og dernæst integrerer projektionen over fladen. Denne såkaldte *flux* af vektorfeltet *gennem* fladen skrives på en af følgende måder



Figur 1

(6.12)

$$\int_{\mathcal{F}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S, \quad \int_{\mathcal{F}} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}S, \quad \int_{\mathcal{F}} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

hvor $\boldsymbol{n}$ er fladens enhedsnormalvektor, og $\mathrm{d}S$ er arealelementet; jævnfør afsnittene 3.7 og 5.5. Man kalder $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ for det *vektorielle arealelement.* Vektorfeltet $\boldsymbol{V}$ kan eksempelvis være den elektriske strømtæthed $\boldsymbol{J}$ eller den magnetiske fluxtæthed $\boldsymbol{B}$; fluxen er da den elektriske strøm gennem $\mathcal{F}$, henholdsvis den magnetiske flux gennem $\mathcal{F}$. Betragter man en strømmende væske eller gas med hastighed $\boldsymbol{v}$ og massetæthed ϱ, er massestrømmen gennem $\mathcal{F}$ lig med fluxen af $\varrho\boldsymbol{v}$.

Indføres en parameterfremstilling $\boldsymbol{r} : E \to \mathbb{R}^3$ med parametre (u, v), har $\mathcal{F}$, som tidligere nævnt, normal hvis $\boldsymbol{N}(u,v) \neq \boldsymbol{0}$, hvor $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v$. Der gælder da

(6.13) $$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{\|\boldsymbol{N}\|}, \quad \mathrm{d}S = \|\boldsymbol{N}\|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v, \quad \text{hvoraf} \quad \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \boldsymbol{N}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Man behøver ikke at forlange $\boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{0}$ overalt, og der gælder følgende.

Reduktionssætning for flux af et vektorfelt

Lad $A \subseteq \mathbb{R}^3$, lad $\boldsymbol{V} : A \to \mathbb{R}^3$ være et C^0-vektorfelt, og lad $\mathcal{F} \subseteq A$ være en stykkevis C^1-flade med parameterfremstilling $\boldsymbol{r} : E \to \mathbb{R}^3$, således at E er et afsluttet og begrænset område i (u,v)-planen, $\boldsymbol{r}$ er injektiv næsten overalt, og $\boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{0}$ næsten overalt. For fluxen af $\boldsymbol{V}$ gennem $\mathcal{F}$ gælder da

$$\int_{\mathcal{F}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S = \int_E \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(u,v)) \cdot \boldsymbol{N}(u,v) \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

Eksempel 3. Idet a, b, c er positive konstanter, vil vi bestemme fluxen Φ_3 af vektorfeltet

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = (y, x, z+c)\,, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

gennem den orienterede halvellipsoide givet ved

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z \geq 0, \quad n_z \geq 0.$$

Af en tidligere undersøgelse (eksempel 3 i afsnit 3.7) fremgår, at halvellipsoiden har parameterfremstillingen

$$(x,y,z) = (a\sin\theta\cos\varphi,\, b\sin\theta\sin\varphi,\, c\cos\theta)\,, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varphi \in [0, 2\pi]\,,$$

med

$$\boldsymbol{N}(\theta,\varphi) = \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right) abc\sin\theta;$$

og det ses, at $\boldsymbol{N}\cdot\mathbf{e}_z$ er ikke-negativ. Man danner nu $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{N}$ og får ved hjælp af reduktionssætningen:

$$\begin{aligned}
\Phi_3 &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[\int_0^{2\pi}\left(\frac{xy}{a^2} + \frac{xy}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{z}{c}\right) abc\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\right]\mathrm{d}\theta \\
&= abc\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[\int_0^{2\pi}\left(\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + \cos^2\theta + \cos\theta\right)\mathrm{d}\varphi\right]\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi abc\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\cos^2\theta + \cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \;=\; 2\pi abc\left[\frac{\cos^3\theta}{3} + \frac{\cos^2\theta}{2}\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{0} \;=\; \tfrac{5}{3}\pi abc.
\end{aligned}$$

Som det fremgår af de følgende eksempler, kan det undertiden betale sig at arbejde med enhedsnormalvektoren $\boldsymbol{n}$ fra begyndelsen. I andre tilfælde viser det sig fordelagtigt at benytte en af de sætninger, hvori fluxen indgår; de forskellige muligheder er resumeret i afsnit 6.10.

Eksempel 4. Vi danner fluxen Φ_4 af det i forrige eksempel betragtede vektorfelt $\boldsymbol{V}$ op gennem ellipseskiven E givet ved

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad z = 0.$$

Man har her $\boldsymbol{n} = \mathbf{e}_z = (0,0,1)$ og $\boldsymbol{V}(x,y,0) = (y,x,c)$, således at

$$\Phi_4 = \int_E \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = c\int_E 1\,\mathrm{d}S = c\,\mathrm{Ar}(E) = \pi abc.$$

Eksempel 5. Lad $\mathcal{F}$ være kvadratet givet ved $|x| \le a,\ |y| \le a,\ z = a$ og $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$, hvor a er en positiv konstant, jævnfør figur 2. Et vektorfelt er givet således:

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

Vektorfeltet er altså overalt rettet bort fra origo, og dets størrelse $\|\boldsymbol{V}\|$ er omvendt proportional med kvadratet på afstanden fra origo; et sådant vektorfelt kaldes et *Coulomb-felt* (eller et *Newton-felt*). Fluxen Φ_5 af $\boldsymbol{V}$ gennem kvadratet $\mathcal{F}$ bestemmes således:

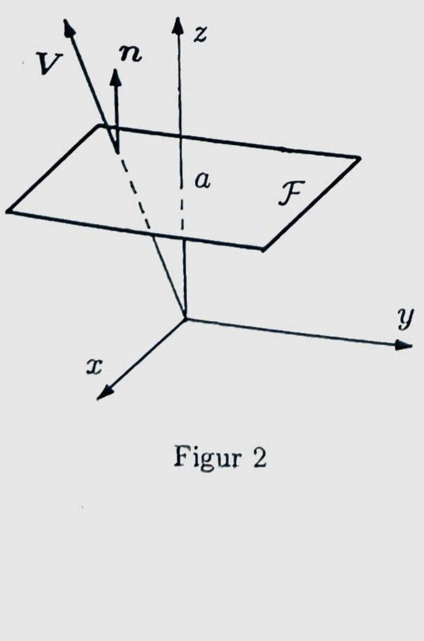
$$\begin{aligned}\Phi_5 &= \int_{\mathcal{F}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S = \int_{-a}^{a} \left[\int_{-a}^{a} \left[\frac{(x,y,z)\cdot(0,0,1)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right]_{z=a} \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \\ &= \int_{-a}^{a} \left[\int_{-a}^{a} \frac{a}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Dette integral er af symmetrigrunde lig med otte gange integralet over den på figur 3 viste trekant T. Denne afgrænses i polære koordinater (ϱ, φ) ved ulighederne

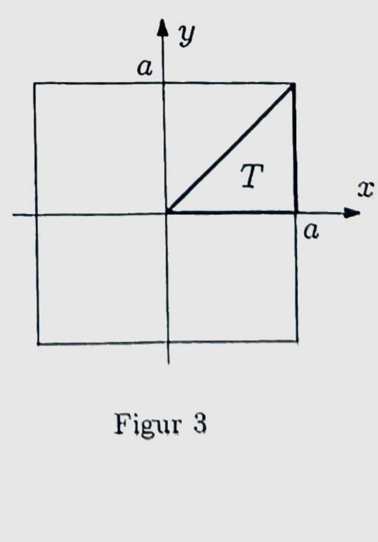
$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le \varrho \le \frac{a}{\cos\varphi}.$$

Idet man undervejs indfører en ny integrationsvariabel ψ ved at sætte $\sin\varphi = \sqrt{2}\sin\psi$, altså $\cos\varphi\, \mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}\cos\psi\, \mathrm{d}\psi$, og $0 \le \psi \le \frac{1}{6}\pi$, fås

$$\begin{aligned}\Phi_5 &= 8\int_T \frac{a}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = 8\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \left[\int_0^{a/\cos\varphi} \frac{a\varrho}{(a^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}\, \mathrm{d}\varrho \right] \mathrm{d}\varphi \\ &= 8\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2+\varrho^2}} \right]_{\frac{a}{\cos\varphi}}^{0} \mathrm{d}\varphi = 8\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \left(1 - \frac{|\cos\varphi|}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}} \right) \mathrm{d}\varphi \\ &= 8\left(\frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2-\sin^2\varphi}}\, \mathrm{d}\varphi \right) = 2\pi - 8\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \frac{\sqrt{2}\cos\psi}{\sqrt{2}\cos\psi}\, \mathrm{d}\psi = 2\pi - \frac{8\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$



Figur 2

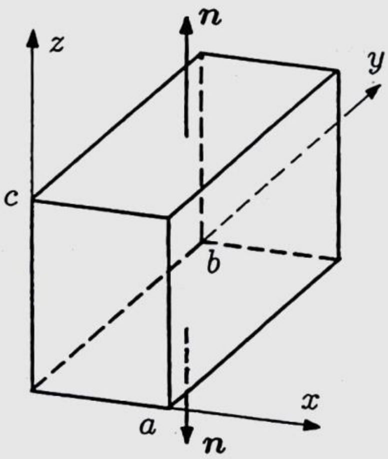


Figur 3

Divergens

For en lukket flade $\mathcal{F}$, som er randen af et område Ω i rummet, altså $\mathcal{F} = \partial\Omega$, regner man i reglen med, at $\boldsymbol{n}$ er rettet ud fra Ω, og man taler da blot om fluxen *ud* gennem den lukkede flade. Vi ser først på et meget simpelt tilfælde, idet vi som Ω tager et akseparallelt parallelepipedum $P = [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$, jævnfør figur 4. Fluxen bestemmer vi ved at betragte siderne parvis. Fra siderne givet ved $z = c$ og $z = 0$, der har $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$, henholdsvis $\boldsymbol{n} = (0,0,-1)$, fås fluxbidraget

$$\int_0^a \left[\int_0^b V_z(x,y,c)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x + \int_0^a \left[\int_0^b -V_z(x,y,0)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^a \left[\int_0^b [V_z(x,y,z)]_{z=0}^{z=c}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^a \left[\int_0^b \left[\int_0^c \frac{\partial V_z}{\partial z}(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$
$$= \int_P \frac{\partial V_z}{\partial z}(x,y,z)\,\mathrm{d}\Omega,$$



altså et rumintegral. Ved addition af de to analoge led får man

$$\text{(6.14)} \qquad \int_{\partial P} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_P \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}\Omega.$$

Figur 4

Det er oplagt, at (6.14) gælder for ethvert akseparallelt parallelepipedum; og da det viser sig, at gyldigheden ikke er begrænset til sådanne punktmængder, er det rimeligt at indføre et navn for integranden i rumintegralet i (6.14); den kaldes *divergensen* af vektorfeltet $\boldsymbol{V}$. Og dette kan gøres for alle værdier af dimensionsantallet.

Definition af divergens for et differentiabelt vektorfelt

$$\operatorname{div}\boldsymbol{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial V_k}{\partial x_k}, \quad \boldsymbol{V} = (V_1,\ldots,V_k)\,.$$

Det er i appendiks (§ 6.9) vist, at (6.14) er rigtig for integrationsmængder, der kan fremstilles *såvel* på formen

$$(x,y) \in B, \quad Z_1(x,y) \le z \le Z_2(x,y),$$

som ved de to analoge udtryk, der fås ved bogstavombytning. En nøjere undersøgelse viser, at (6.14) endda er gyldig for en endnu mere omfattende klasse af rumlige punktmængder Ω. Herunder viser det sig, at selve formuleringen af de krav, der skal stilles til randen $\partial\Omega$, er ret omfattende og kræver indførelse af nye begrebsdannelser. Vi nøjes derfor med en mindre generel, men mere håndtérlig formulering.

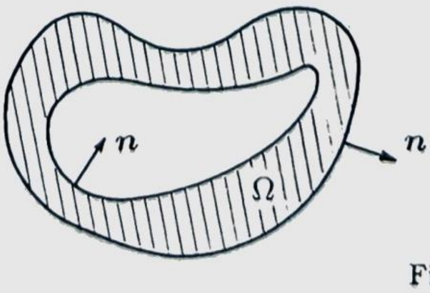
Gauss' sætning

Lad $\boldsymbol{V}$ være et C^1-vektorfelt på $A \subseteq \mathbb{R}^3$, og lad Ω være en afsluttet og begrænset delmængde af A, hvis rand $\partial\Omega$ er foreningsmængde af lukkede, stykkevis C^1-flader, der har en *udadrettet* enhedsnormalvektor $\boldsymbol{n}$ næsten overalt. (Normalvektoren kan mangle på C^1-kurver, hvor $\partial\Omega$ er sat sammen af C^1-flader). Da gælder

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{V} \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S.$$

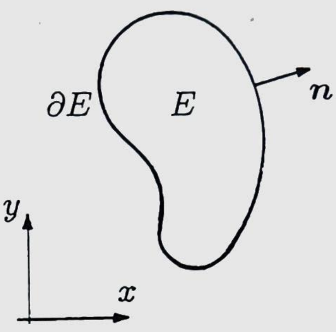
Sætningen, der også kaldes Gauss' divergenssætning eller blot divergenssætningen, er en generalisation af differential- og integralregningens hovedsætning: et integral af en differentieret størrelse er lig med et integral over randen af integrationsmængden, hvori der ikke indgår differentiation. Bemærk, at formlen kan læses – og benyttes – i begge retninger.

Den opstillede forudsætning om randens geometriske egenskaber indebærer, at der gerne må være kanter på $\partial\Omega$. Dette er eksempelvis tilfældet for overfladen af et parallelepipedum (en kasse) eller, mere generelt, randen af et rumligt polyeder. I praksis behøver man derfor næppe at overveje, om $\partial\Omega$ nu også er tilstrækkelig pæn. Det kan ske, at Ω har et hul – eller flere – så $\partial\Omega$ ikke er sammenhængende (figur 5). I så fald må man ved udførelse af integrationen over $\partial\Omega$ summere integraler over de C^1-flader, hvoraf $\partial\Omega$ er sammensat.



Figur 5

Det er vigtigt at kontrollere de andre forudsætninger for Gauss' sætning. Man kan meget vel komme ud for, at vektorfeltet giver anledning til vanskeligheder i visse punkter; og det er selvsagt væsentligt at bringe orienteringen i orden, så $\boldsymbol{n}$ faktisk peger *ud* fra integrationsmængden Ω. Hvis Ω har hul(ler), er det måske mere nærliggende at tænke på $\boldsymbol{n}$ som rettet *bort fra* Ω.



Figur 6

Gauss' sætning for et *plant* vektorfelt har den analoge form

$$\int_E \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \mathrm{d}S = \int_{\partial E} \left(V_x n_x + V_y n_y \right) \mathrm{d}s. \tag{6.15}$$

Randen ∂E skal være en stykkevis C^1-kurve uden dobbeltpunkter, jf. figur 6.

Et vektorfelt $\boldsymbol{V}$ kaldes *divergensfrit*, hvis der i hele definitionsmængden gælder $\operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0$.

Eksempel 6. Idet a, b, c er positive konstanter, vil vi bestemme fluxen Φ_6 af vektorfeltet

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = (y, x, z+c), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

ud gennem overfladen af den massive halvellipsoide givet ved

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1, \quad z \ge 0.$$

Det ses, at $\operatorname{div} \boldsymbol{V}$ er konstant lig med 1, så fluxen er ifølge Gauss' sætning lig med voluminet, altså

$$\Phi_6 = \tfrac{2}{3}\pi abc.$$

Vi kunne også bruge de i eksempel 3 og eksempel 4 fundne fluxe Φ_3 og Φ_4; men vi må da overveje de orienteringer, vi dengang benyttede. Ved sammenligning fås, at Φ_3, men ikke Φ_4, har rigtigt fortegn; man får derfor

$$\Phi_6 = \Phi_3 - \Phi_4 = \tfrac{5}{3}\pi abc - \pi abc = \tfrac{2}{3}\pi abc.$$

Eksempel 7. Det ses umiddelbart, at stedvektoren (x, y, z) har divergens 3. Ved anvendelse af Gauss' sætning fås da en volumenformel

$$\operatorname{Vol}(\Omega) = \tfrac{1}{3} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S.$$

Den analoge arealformel

$$\operatorname{Ar}(E) = \tfrac{1}{2} \int_{\partial E} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}s$$

fås ved hjælp af Gauss' sætning for et plant vektorfelt (6.15).

Eksempel 8. For en konstant vektor $\boldsymbol{a}$ gælder $\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S = 0$, idet divergensen af et konstant vektorfelt er nul.

Eksempel 9. For et vilkårligt område Ω i rummet opfylder den magnetiske fluxtæthed $\boldsymbol{B}$ ligningen

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S = 0.$$

Dette er integralformuleringen af en af Maxwells ligninger. Anvendes Gauss' sætning, fås heraf

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{B}\, \mathrm{d}\Omega = 0.$$

Den kontinuerte funktion $\operatorname{div} \boldsymbol{B}$ kan ikke være forskellig fra nul i noget punkt; thi var den det, ville $\operatorname{div} \boldsymbol{B}$ være forskellig fra nul med konstant fortegn i en kugle med centrum i punktet, og ved at tage denne kugle som Ω ville man få en modstrid. Der gælder altså

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0;$$

dette er differentialformuleringen af den betragtede Maxwell-ligning. Omvendt fås integralformuleringen umiddelbart heraf ved anvendelse af Gauss' sætning. Det skal fremhæves, at man i almindelighed ikke kan slutte fra integral-egenskab til integrand-egenskab. Kun fordi integralformuleringens integrationsområde Ω er *vilkårligt*, lod det sig gøre i dette tilfælde.

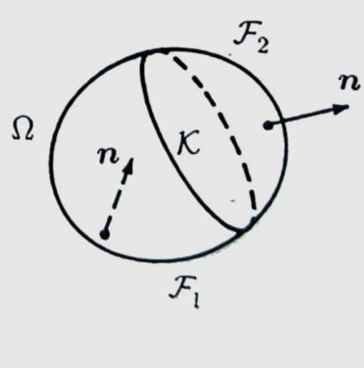
Eksempel 10. Lad $\boldsymbol{V}$ være et *divergensfrit* vektorfelt, og lad Ω være et område i rummet, hvis overflade $\partial\Omega$ som vist på figur 7 af en lukket kurve $\mathcal{K}$ er delt i to flader $\mathcal{F}_1$ og $\mathcal{F}_2$. Fladerne orienteres som vist; normalvektoren peger altså indad på $\mathcal{F}_1$ og udad på $\mathcal{F}_2$. Fluxene af $\boldsymbol{V}$ kaldes Φ_1, henholdsvis Φ_2. Med den beskrevne orientering giver Gauss' sætning

$$\Phi_2 + (-\Phi_1) = \int_{\mathcal{F}_2} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S + \int_{\mathcal{F}_1} \boldsymbol{V} \cdot (-\boldsymbol{n})\, \mathrm{d}S = \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{V}\, \mathrm{d}\Omega = 0.$$

Man har altså $\Phi_2 = \Phi_1$.

Det er anskueligt klart, at den ene flade ved "kontinuert deformering" kan bringes til at gå over i den anden – med korrekt orientering. Det er derfor rimeligt at betragte $\mathcal{K}$ som en *given* kurve, hvori man kan udspænde flader. Som vi netop har set, har et divergensfrit vektorfelt samme flux Φ gennem alle sådanne flader, og det er derfor naturligt at opfatte Φ som hørende til *kurven*. Man siger, at Φ er den af kurven *omsluttede* flux. Vi kommer senere tilbage til, hvorledes kurven orienteres.

Den magnetiske fluxtæthed er, som omtalt i forrige eksempel, divergensfri. Man kan derfor tale om den *magnetiske flux*, som omsluttes af en kurve; denne kunne eksempelvis være en leder.



Figur 7

Eksempel 11. Coulomb-vektorfeltet

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (x,y,z) \neq (0,0,0)\,,$$

som vi betragtede i eksempel 5, har divergens nul. Dette vises ved addition af

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

og de to analoge udtryk.

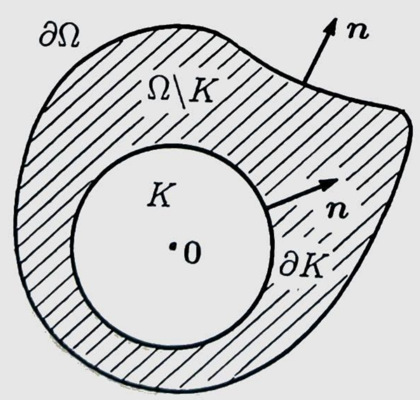
Gauss' sætning viser da, at fluxen af Coulomb-feltet gennem en lukket flade $\partial\Omega$ er nul – *vel at mærke* under forudsætning af, at punktet $\mathbf{0}$ ikke tilhører Ω. Hvis nu $\mathbf{0}$ er et indre punkt i Ω, kan vi ikke anvende Gauss' sætning på Ω. Der udskæres da en kugle $K = \mathrm{K}(\mathbf{0}; a)$, hvor a blot skal være så lille, at K er en delmængde af Ω. Dernæst anvender vi Gauss' sætning på $\Omega \backslash K$; og med betegnelserne på figur 8 fås da for fluxen

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S + \int_{\partial K} \boldsymbol{V}\cdot(-\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S = \int_{\Omega\backslash K} \operatorname{div}\boldsymbol{V}\,\mathrm{d}\Omega = 0,$$

hvoraf følger

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_{\partial K} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_{\partial K} \frac{\boldsymbol{n}}{a^2}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{a^2}\int_{\partial K}\mathrm{d}S = 4\pi.$$

Fluxen af Coulomb-feltet ud gennem en lukket flade $\partial\Omega$ er altså 4π, hvis $\mathbf{0}$ er et indre punkt i Ω. Derved kan resultatet i eksempel 5 nu let udledes på følgende måde. Den søgte flux Φ_5 er af symmetrigrunde en sjettedel af fluxen gennem overfladen af terningen $[-a,a]^3$, og denne har udadrettet enhedsnormalvektor $\boldsymbol{n}$; man får da straks $\Phi_5 = \frac{1}{6}\cdot 4\pi = \frac{2}{3}\pi$.



Figur 8

Eksempel 12. For en strømmende væske eller gas med massetæthed ϱ og hastighedsvektor $\boldsymbol{v}$ er massen i et område Ω og massestrømmen *ud* gennem overfladen givet således:

$$M = \int_{\Omega} \varrho \,\mathrm{d}\Omega, \qquad \text{henholdsvis} \qquad q = \int_{\partial\Omega} \varrho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S.$$

Loven om massens bevarelse kan udtrykkes som

$$q \,\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}M.$$

Omformning ved hjælp af Gauss' sætning giver nu:

$$0 = q + \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \int_{\partial\Omega} \varrho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} \varrho \,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} \left(\operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v}) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} \right) \mathrm{d}\Omega.$$

Da dette skal gælde for et vilkårligt område Ω, og integranden er kontinuert, må denne være nul overalt:

$$\operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v}) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0.$$

Denne version af loven om massebevarelse kaldes for *kontinuitetsligningen.* For andre bevarede størrelser kan man gå frem på præcis samme måde. Energibevarelse kan således udtrykkes ved

$$\operatorname{div} \boldsymbol{q} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

hvor u betegner energitæthed og $\boldsymbol{q}$ energistrømtæthed, mens bevarelse af elektrisk ladning kan skrives

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0,$$

hvor $\boldsymbol{J}$ er strømtætheden og ϱ er ladningstætheden.

Ved en kemisk reaktion er de indgående komponenter normalt ikke bevarede. Betragter man en enkelt komponent med koncentration c og dannelseshastighed R, når man ved en let modifikation af ovenstående overvejelser frem til

$$\operatorname{div}(c\boldsymbol{v}) + \frac{\partial c}{\partial t} = R.$$

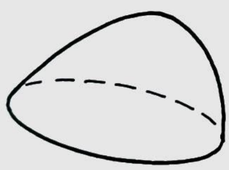
6.4. Vektorfelts rotation. Stokes' sætning

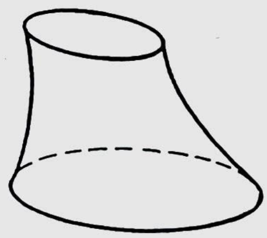
I forrige afsnit opstilledes en sætning om et vektorfelts flux gennem en lukket flade. Analogt kan man betragte et vektorfelts cirkulation langs en *lukket kurve*, og man søger at videreføre analogien på følgende måde. Kurven opfattes som randkurve $\delta\mathcal{F}$ for en flade $\mathcal{F}$, og det formodes, at cirkulationen langs $\delta\mathcal{F}$ kan udtrykkes som en flux gennem $\mathcal{F}$, altså at der findes en sætning af formen

$$\oint_{\delta\mathcal{F}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{t}\, \mathrm{d}s = \int_{\mathcal{F}} \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S, \tag{6.16}$$

hvor vektorfeltet $\boldsymbol{W}$ på passende måde er bestemt af det givne vektorfelt $\boldsymbol{V}$. Hertil må for det første bemærkes, at man i stedet for kurven kunne have ladet *fladen* være den givne. Der må da regnes med den mulighed, at randkurven består af flere grene (figur 1). For simpelheds skyld forudsættes i det følgende, at randkurven er én lukket kurve (figur 2); det er ikke vanskeligt at gå videre til det generelle tilfælde.

Figur 1



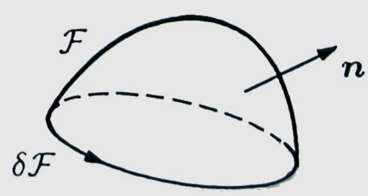


Figur 2

For det andet må man huske, at både $\mathcal{F}$ og $\delta\mathcal{F}$ er *orienterede*. Det er derfor nødvendigt at fastlægge en relation mellem orienteringerne, og man vælger:

Højrekonventionen

Normalretningen på fladen $\mathcal{F}$ danner højreskrue med omløbsretningen på randkurven $\delta\mathcal{F}$.

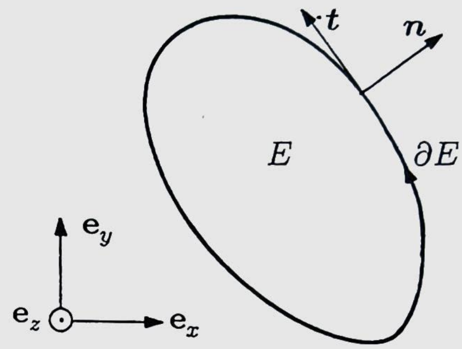


Figur 3

Eksempel 1. Jordens nordlige halvkugle betragtes. Lader man her $\boldsymbol{n}$ pege bort fra centrum, kræver højrekonventionen, at ækvator gennemløbes mod øst. Retningen er modsat, hvis ækvator tages som randkurve for den sydlige halvkugle med udadrettet $\boldsymbol{n}$.

For at blive ledt på sporet af, hvad $\boldsymbol{W}$ skal være, betragter vi først et simpelt specialtilfælde, idet vi som $\mathcal{F}$ tager et område E i (x, y)-planen, jævnfør figur 4. Randkurven gennemløbes i planens positive omløbsretning, og enhedsnormalvektoren til det plane område E er derfor netop $\mathbf{e}_z$. Den søgte sætning har i dette tilfælde formen

$$\int_{\partial E} \left(V_x t_x + V_y t_y\right) \mathrm{d}s = \int_E W_z \mathrm{d}S.$$



Figur 4

Vi benytter nu også den viste enhedsvektor $\boldsymbol{n}$, der er rettet ud fra ∂E og ligger i planen. Der gælder

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \times \mathbf{e}_z, \quad \text{altså} \quad n_x = t_y,\ n_y = -t_x.$$

Benyttes nu Gauss' sætning for et plant vektorfelt, får vi så

$$\begin{aligned}\int_{\partial E} \left(V_x t_x + V_y t_y\right) \mathrm{d}s &= \int_{\partial E} \left(-V_x n_y + V_y n_x\right) \mathrm{d}s = \int_{\partial E} \left(V_y, -V_x\right) \cdot \left(n_x, n_y\right) \mathrm{d}s \\ &= \int_E \operatorname{div}\left(V_y, -V_x\right) \mathrm{d}S = \int_E \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \mathrm{d}S.\end{aligned}$$

Det fremgår heraf, at et vektorfelt, hvis z-koordinat er $\partial V_y / \partial x - \partial V_x / \partial y$, og hvis to øvrige koordinater fremkommer ved cyklisk forskydning af x, y, z, må være af betydning. På baggrund heraf defineres *rotationen* af et vektorfelt således:

Definition af rotation af et differentiabelt rumligt vektorfelt

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \mathbf{e}_z.$$

Man kan også skrive definitionen på et vektorfelts rotation som en determinant:

(6.17)
$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}.$$

Det viser sig, at $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{V}$ faktisk er det søgte felt $\boldsymbol{W}$, idet man har:

Stokes' sætning

Lad $\mathcal{F}$ være en orienterbar, stykkevis C^2-flade, der har normal næsten overalt, og hvis randkurve $\delta\mathcal{F}$ er en lukket, stykkevis C^1-kurve uden dobbeltpunkter, der har tangent næsten overalt. (Den kan mangle i punkter, hvor $\delta\mathcal{F}$ er sat sammen af forskellige C^1-kurver). Orienteringerne af $\mathcal{F}$ og $\delta\mathcal{F}$ er givet ved højrekonventionen. For et C^1-vektorfelt $\boldsymbol{V} : A \to \mathbb{R}^3$, hvor $A \subseteq \mathbb{R}^3$ og $A \supseteq \mathcal{F}$, gælder da

$$\oint_{\delta\mathcal{F}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{t}\, \mathrm{d}s = \int_{\mathcal{F}} \boldsymbol{n} \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{V}\, \mathrm{d}S.$$

Stokes' sætning er i lighed med Gauss' sætning at betragte som en generalisation af differential- og integralregningens hovedsætning, og formlen kan igen læses begge veje. For plane vektorfelter får de to sætninger samme indhold, kun formuleringen er forskellig, jævnfør ovenstående "udledning". Formlen kan i dette tilfælde skrives

$$\oint_{\partial E} V_x \mathrm{d}x + V_y \mathrm{d}y = \int_E \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \mathrm{d}S; \tag{6.18}$$

den kaldes *Greens sætning i planen.*

Stokes' sætning indeholder flere gyldighedsbetingelser, som ikke vejer lige tungt ved anvendelserne. Man må altid sikre sig, at kravene til orienteringen er opfyldt. Vektorfeltet kan godt være ubehageligt i enkelte punkter.

Består opgaven i at bestemme en cirkulation langs en given, lukket kurve $\mathcal{K}$, kan man få $\mathcal{K}$ frem som randkurve for uendelig mange flader. Man har altså frihed til at *vælge* en flade $\mathcal{F}$, således at $\delta\mathcal{F} = \mathcal{K}$; og det kan godt være vanskeligt at vælge en flade, således at udregningen af fluxen i Stokes' sætning forløber let og hurtigt. Ligger kurven $\mathcal{K}$ i en plan, kan det være hensigtsmæssigt at udfylde $\mathcal{K}$ med et stykke af planen; i så fald bliver $\boldsymbol{n}$ jo en konstant vektor. Er planen parallel med en af koordinatplanerne, kan man tilmed nøjes med at bestemme én af rotationens koordinatfunktioner.

Et vektorfelt $\boldsymbol{V}$ kaldes *rotationsfrit*, hvis der i hele dets definitionsmængde gælder $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{V} = \mathbf{0}$. Det følger umiddelbart ved indsættelse, at man i almindelighed har

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}\, f) = \mathbf{0}, \tag{6.19}$$

altså: et gradientfelt har rotation nul. Ved sammenligning med stamfunktionssætningen får man omvendt: *Et rotationsfrit vektorfelt i et stjerneformet område er* *et gradientfelt.* Endvidere viser man ud fra definitionerne umiddelbart, at der alment gælder

$$\operatorname{div}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{V}) = \mathbf{0}. \tag{6.20}$$

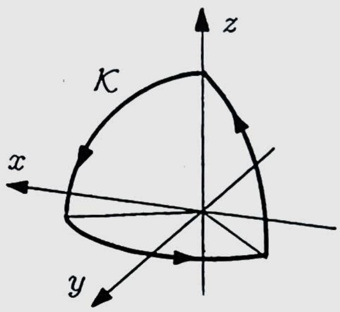
At der også hertil svarer en omvendt sætning, vil fremgå af afsnit 6.6.

Eksempel 2. Vi ønsker at bestemme cirkulationen C af vektorfeltet

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = \left(z^2x, x^2y, y^2z\right), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

langs den på figur 5 viste, orienterede kurve $\mathcal{K}$ bestående af tre cirkelbuer, der alle har centrum $\mathbf{0}$ og radius a, og som er beliggende i planerne $z = 0$, $y = -x$ og $x = y\sqrt{3}$.

En direkte bestemmelse af cirkulationen ville bestå i udregning af tre *forskellige* kurveintegraler. Men alle tre cirkelbuer ligger på kuglefladen $\partial\overline{\mathrm{K}}(\mathbf{0};a)$, og $\mathcal{K}$ er randkurve for den del $\mathcal{F}$ af kuglefladen, der i polære koordinater afgrænses ved $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ og $\varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Det skulle da være mere overkommeligt at bestemme C ved hjælp af Stokes' sætning.



Figur 5

Først bemærkes, at kuglefladen får rigtig orientering, idet vi som enhedsnormalvektor tager den udadrettede, altså $\boldsymbol{n} = \frac{1}{a}(x,y,z)$. Dernæst bestemmes

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{V}(x,y,z) = (2yz, 2zx, 2xy),$$

og man får af Stokes' sætning

$$\begin{aligned}
C &= \int_{\mathcal{K}} \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathcal{F}} \boldsymbol{n}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{V}\,\mathrm{d}S = \frac{6}{a}\int_{\mathcal{F}} xyz\,\mathrm{d}S \\
&= \frac{6}{a}\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(a^3\cos\theta\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\right)a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}\varphi \\
&= 6a^4\left[\tfrac{1}{4}\sin^4\theta\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} = \tfrac{3}{4}a^4\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{3}{16}a^4.
\end{aligned}$$

Eksempel 3. Ved i definitionen at sætte vektorfeltet $\boldsymbol{V}$ lig med stedvektoren $\boldsymbol{x}$ får man $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$; stedvektoren er altså rotationsfri. Dernæst fås af Stokes' sætning

$$\oint_{\mathcal{K}} \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s = 0$$

for en vilkårlig lukket kurve $\mathcal{K}$.

Eksempel 4. Vi betragter to vektorfelter, der begge har $\mathbb{R}^3$ som definitionsmængde:

$$\boldsymbol{V} = (\cos y,\ \cos x,\ \sin y - \sin x)\,, \qquad \boldsymbol{U} = (r, r, r)\,, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Af definitionen på rotation finder man først

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V},$$

og dernæst, idet $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$, etc., benyttes,

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{U} = \left(\frac{y-z}{r}, \frac{z-x}{r}, \frac{x-y}{r}\right), \quad r \neq 0.$$

Ved udregning ses, at $\boldsymbol{U}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{U} = 0$. I det ene tilfælde er rotationen således parallel med vektorfeltet (endda lig med det), i det andet vinkelret på det. Man kan altså ikke sige noget generelt om retningerne af et vektorfelt og dets rotation.

Eksempel 5. En orienteret kurve $\mathcal{K}$ er givet som skæringskurve mellem (1) den cirkulære cylinderflade $x^2 + y^2 = ax$ og (2) fladen $z = \sqrt{4a^2 - ax}$, der er halvdelen af en parabolsk cylinderflade; omløbsretningen på $\mathcal{K}$ danner højreskrue med den positive z-akse. (Se figur 6). Vi vil benytte Stokes' sætning til at bestemme cirkulationen C af vektorfeltet

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = \left(3xy, 2x^2, -yz\right), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

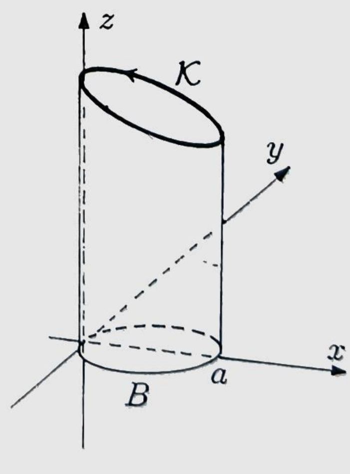
langs $\mathcal{K}$, og vi danner derfor først $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{V} = (-z, 0, x)$. Da $\mathcal{K}$ er givet som skæringskurve, er der flere nærliggende muligheder for udfyldning. Vi benytter først et stykke af den parabolske cylinderflade, altså fladen $\mathcal{F}_1$ givet ved $z = \sqrt{4a^2 - ax}$, $(x,y) \in B$, hvor B er den på figur 6 viste cirkelskive i (x,y)-planen. Fladen $\mathcal{F}_1$ har normalvektor $\boldsymbol{N} = \left(\dfrac{a}{2z}, 0, 1\right)$, der giver korrekt orientering. Af Stokes' sætning fås nu

$$C = \int_{\mathcal{F}_1} \boldsymbol{n}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{V}\,\mathrm{d}S = \int_B \boldsymbol{N}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{V}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_B \left(-\tfrac{1}{2}a + x\right)\mathrm{d}S = -\tfrac{1}{2}a\pi\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 + \int_B x\,\mathrm{d}S = 0,$$

idet vi har benyttet resultatet i eksempel 9, afsnit 5.2.

Man kan også udfylde $\mathcal{K}$ med den del af den cirkulære cylinderflade, der ligger mellem $\mathcal{K}$ og (x,y)-planen, samt cirkelskiven B. (Denne mulighed fremgår af figur 6). Man får atter $C = 0$, men regningerne er i dette tilfælde ret lange og vil ikke blive gennemført.

Endelig bemærkes, at man af ligningerne for de to skærende flader får $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$. Dette betyder, at $\mathcal{K}$ også ligger på kuglefladen med centrum $(0,0,0)$ og radius $2a$. Denne har enhedsnormalvektor $\boldsymbol{n} = (2a)^{-1}(x,y,z)$. Vi udfylder $\mathcal{K}$ med et stykke $\mathcal{F}_2$ af kuglefladen og får da $\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{V} = \dfrac{1}{2a}(x,y,z)\cdot(-z,0,x) = 0$ på $\mathcal{F}_2$. Stokes' sætning giver nu umiddelbart $C = 0$.



Figur 6

Eksempel 6. For tidsuafhængige magnetfelter gælder Ampères lov for enhver flade $\mathcal{F}$:

$$\oint_{\delta\mathcal{F}} \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s = I(\mathcal{F}),$$

hvor $\boldsymbol{H}$ er den magnetiske feltstyrke, og $I(\mathcal{F})$ er den elektriske strøm gennem fladen $\mathcal{F}$. (Jævnfør eksempel 3 i § 6.2). Udtrykkes strømmen ved strømtætheden $\boldsymbol{J}$, får man ved benyttelse af Stokes' sætning

$$\int_{\mathcal{F}} \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = I(\mathcal{F}) = \oint_{\delta\mathcal{F}} \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s = \int_{\mathcal{F}} \boldsymbol{n} \cdot \mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}S;$$

altså

$$\int_{\mathcal{F}} \boldsymbol{n} \cdot (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H} - \boldsymbol{J})\,\mathrm{d}S = 0,$$

hvor $\mathcal{F}$ er vilkårlig. Antag nu, at vektoren $\boldsymbol{Y} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{H} - \boldsymbol{J}$ er forskellig fra $\mathbf{0}$ i et punkt P. Vi kan da vælge en enhedsvektor $\boldsymbol{e}$, så $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{Y} > 0$ i punktet P; og da $\boldsymbol{Y}$ er kontinuert, gælder så $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{Y} > 0$ i en kugle K med centrum P. Vælges $\mathcal{F}$ som et stykke af en plan vinkelret på $\boldsymbol{e}$, således at $\mathcal{F} \subset K$, giver integration af $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{Y}$ over $\mathcal{F}$ ikke nul; vi er altså nået til en modstrid. Man må derfor have

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J},$$

der er differentialformuleringen af Ampères lov. Man kommer straks tilbage til integralformuleringen ovenfor ved at benytte Stokes' sætning.

Eksempel 7. Anvendes Greens sætning i planen på vektorfelterne $(0, x)$ og $(-y, 0)$, får man planintegralet af konstanten 1. Resultatet er

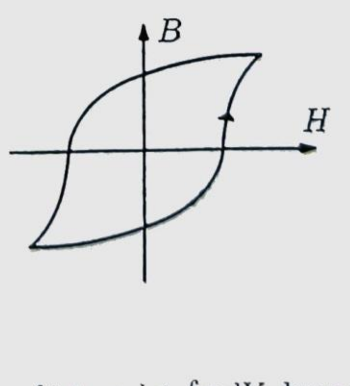
$$\mathrm{Ar}(E) = \oint_{\partial E} x\,\mathrm{d}y = \oint_{\partial E} -y\,\mathrm{d}x,$$

og heraf videre

$$\mathrm{Ar}(E) = \tfrac{1}{2} \oint_{\partial E} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x,$$

hvor randkurven ∂E skal gennemløbes i planens positive omløbsretning. Formler af denne type kan blandt andet benyttes i forbindelse med materialer, der udviser *magnetisk hysterese*.

For et sådant materiale vil relationen mellem magnetisk fluxtæthed B og magnetisk feltstyrke H ved periodisk feltvariation være som antydet på figur 7. Det viser sig, at der i løbet af en periode sker en udvikling af varmeenergi med tætheden $\oint H\,\mathrm{d}B$, og dette integral (over perioden) er netop det areal, som kurven omslutter. Ved "areal" forstås her selvfølgelig selve det geometriske areal multipliceret med omsætningsfaktorerne for de to akser.



Figur 7

Analogt fås arbejdet for en stempelmaskine ved hjælp af integralet $\oint p\,\mathrm{d}V$, hvor p er trykket og V er voluminet.

6.5. Nabla-kalkylen

Den vektorielle differentialoperator

I kapitel 3 har vi indført symbolet ∇ (nabla), idet gradienten af et skalarfelt f skrives ∇f i stedet for **grad** f. Det viser sig hensigtsmæssigt at udvide brugen af dette symbol til andre størrelser, der fremkommer ved differentiation. For det meste kan dimensionstallet k være vilkårligt; men i nogle tilfælde må man kræve $k = 3$. Nabla indføres formelt som en *vektoriel differentialoperator*

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right). \tag{6.21}$$

Ved anvendelse af regneregler for vektorer – multiplikation med en skalar samt dannelse af skalarprodukt (prikprodukt) og vektorprodukt (krydsprodukt) – får vi dernæst følgende nabla-udtryk for de differentialoperatorer, som vi allerede kender:

Gradient af skalarfelt	$\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \right)$
Divergens af vektorfelt	$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial V_k}{\partial x_k}$
Rotation af vektorfelt	$\nabla \times \boldsymbol{V} = \left(\dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z}, \dfrac{\partial V_x}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial x}, \dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y} \right), \quad k = 3$
Differential af skalarfelt	$\mathrm{d}f = \boldsymbol{U} \cdot \nabla f = U_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + U_k \dfrac{\partial f}{\partial x_k}$
Differential af vektorfelt	$\mathrm{d}\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{U} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{V} = (\boldsymbol{U} \cdot \nabla V_1, \ldots, \boldsymbol{U} \cdot \nabla V_k) = (\mathrm{d}V_1, \ldots, \mathrm{d}V_k).$

Bemærk, at der i differentialerne indgår et ekstra vektorfelt $\boldsymbol{U}$; det blev tidligere (§ 3.1) betegnet $\boldsymbol{h}$. Specielt kan vi sætte $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{x}$; de fremkomne formler er opført i skemaet side 209 sammen med andre formler, hvori stedvektoren indgår.

Af definitionerne fås også, at operatorerne er *lineære*:

Differentiation af lineære udtryk			
1	$\nabla(\alpha f+\beta g)$	$=$	$\alpha\nabla f+\beta\nabla g$
2	$\nabla\cdot(\alpha\boldsymbol{V}+\beta\boldsymbol{W})$	$=$	$\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{V}+\beta\nabla\cdot\boldsymbol{W}$
3	$\nabla\times(\alpha\boldsymbol{V}+\beta\boldsymbol{W})$	$=$	$\alpha\nabla\times\boldsymbol{V}+\beta\nabla\times\boldsymbol{W}$
4	$\boldsymbol{U}\cdot\nabla(\alpha f+\beta g)$	$=$	$\alpha\boldsymbol{U}\cdot\nabla f+\beta\boldsymbol{U}\cdot\nabla g$
5	$(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)(\alpha\boldsymbol{V}+\beta\boldsymbol{W})$	$=$	$\alpha(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}+\beta(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{W}$
α og β betegner konstanter			

I stedet for at bevise disse formler ved at regne i koordinater kan man benytte *nabla-kalkylen*. Hermed menes, at man benytter de sædvanlige vektorielle regneregler også for nabla *med den indskrænkning*, at nabla tillige er en differentialoperator og derfor ikke må bytte plads med et felt, som den skal virke på. Nabla-metodens fordele viser sig dog først rigtigt ved den følgende behandling af de knap så trivielle regneregler for differentiation af produkter og for anden ordens differentiation.

Differentiation af produkter

Af skalar- og vektorfelter kan der dannes fire produkter: fg, $f\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}$; og disse kan differentieres, se skemaet på næste side. Disse formler kan man eftervise ved at indføre koordinater og benytte definitionerne; men sådanne regninger bliver i nogle tilfælde ret lange, og det kan være vanskeligt undervejs at se, hvorledes man skal gruppere de indgående led. Vi vil derfor ikke give beviser af denne type, men bruger i stedet nabla-kalkylen. Regningerne bliver da forholdsvis korte, og man får ad denne vej faktisk *udledt*, ikke blot eftervist, formlerne.

Som forberedelse resumerer vi fremgangsmåden ved differentiation af et produkt $f(x)g(x)$. Først opskrives en sum af to led med samme udseende, og i hvert af disse holder man den ene faktor konstant:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)\right]_{g\ \mathbf{konstant}}+\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)\right]_{f\ \mathbf{konstant}} \tag{6.22}$$

Dernæst sættes de konstante faktorer uden for differentiationstegnet, og man har da den endelige form af produktreglen. Denne deling i to skridt – som man normalt ikke tænker på ved differentiation af produktet fg – kan overføres til nabla-kalkylen.

Differentiation af produkter			
1	$\nabla(fg)$	$=$	$g\nabla f + f\nabla g$
2	$\boldsymbol{U}\cdot\nabla(fg)$	$=$	$g\boldsymbol{U}\cdot\nabla f + f\boldsymbol{U}\cdot\nabla g$
3	$\nabla\cdot(f\boldsymbol{V})$	$=$	$(\nabla f)\cdot\boldsymbol{V} + f\nabla\cdot\boldsymbol{V}$
4	$\nabla\times(f\boldsymbol{V})$	$=$	$(\nabla f)\times\boldsymbol{V} + f\nabla\times\boldsymbol{V}$
5	$\nabla\cdot(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})$	$=$	$(\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{W} - (\nabla\times\boldsymbol{W})\cdot\boldsymbol{V}$
6	$\nabla\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})$	$=$	$(\boldsymbol{W}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} - \boldsymbol{W}(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) - (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{W} + \boldsymbol{V}(\nabla\cdot\boldsymbol{W})$
7	$\nabla(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{W})$	$=$	$(\boldsymbol{W}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} + \boldsymbol{W}\times(\nabla\times\boldsymbol{V})$
			$+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{W} + \boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{W})$

Vi ser først på den fjerde formel i skemaet, hvor vi svarende til (6.22) får

$$\nabla\times(f\boldsymbol{V}) = [\nabla\times(f\boldsymbol{V})]_{\boldsymbol{V}\,\mathbf{konstant}} + [\nabla\times(f\boldsymbol{V})]_{f\,\mathbf{konstant}}.$$

Dernæst flytter man de konstante faktorer uden for differentiationstegnene, idet man anvender regler fra vektorregningen (jf. afsnit 1.1), således at nabla til slut står umiddelbart foran det felt, der skal differentieres:

$$[\nabla\times(f\boldsymbol{V})]_{\boldsymbol{V}\,\mathbf{konstant}} = (\nabla f)\times\boldsymbol{V},$$

$$[\nabla\times(f\boldsymbol{V})]_{f\,\mathbf{konstant}} = [\nabla\times(\boldsymbol{V}f)]_{f\,\mathbf{konstant}} = (\nabla\times\boldsymbol{V})\,f.$$

Den tredje formel i skemaet fås på samme måde, og de to første er vist i afsnit 3.1. Den femte formel er lidt vanskeligere. Man får først

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}) = [\nabla\cdot(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})]_{\boldsymbol{W}\,\mathbf{konstant}} + [\nabla\cdot(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})]_{\boldsymbol{V}\,\mathbf{konstant}}.$$

Som bekendt kan prik og kryds ombyttes, altså:

$$[\nabla\cdot(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})]_{\boldsymbol{W}\,\mathbf{konstant}} = (\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{W};$$

benyttes desuden, at vektorproduktet er antikommutativt, fås:

$$[\nabla\cdot(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})]_{\boldsymbol{V}\,\mathbf{konstant}} = -[\nabla\cdot(\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{V})]_{\boldsymbol{V}\,\mathbf{konstant}} = -(\nabla\times\boldsymbol{W})\cdot\boldsymbol{V},$$

hvormed den femte formel er vist. De to sidste formler bygger på udtrykket (1.17) for det dobbelte vektorprodukt

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}, \tag{6.23}$$

hvor vi i de to led på højre side kan ombytte dels skalar og vektor, dels faktorerne i et skalarprodukt, således at vi ved "oversættelsen" får nabla til at stå rigtigt. Først dannes

$$[\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})]_{\boldsymbol{W}\,\text{konstant}} = (\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{V} - \boldsymbol{W}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}),$$

og

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})]_{\boldsymbol{V}\,\text{konstant}} &= -[\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{V})]_{\boldsymbol{V}\,\text{konstant}} \\ &= -((\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{W} - \boldsymbol{V}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{W})),\end{aligned}$$

der ved addition giver den sjette formel. Til den syvende benyttes

$$\boldsymbol{W}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V}) = [\boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{W})]_{\boldsymbol{W}\,\text{konstant}} - (\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{V}$$

og et analogt udtryk.

Eksempel 1. Nogle af produktformlerne har kvadratformler som specialtilfælde, således

$$\boldsymbol{\nabla}(f^2) = 2f\boldsymbol{\nabla}f, \qquad \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}) = 2(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{V} + 2\boldsymbol{V}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V}).$$

Eksempel 2. Lad $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ være konstante vektorer. Ved at benytte produktformel nr. 4 sammen med resultatet fra eksempel 2 i afsnit 3.2 får man

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{a}\exp(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{\nabla}\,(\exp(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}))\times\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\exp(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}).$$

Eksempel 3. Hvis vektorfelterne $\boldsymbol{V}$ og $\boldsymbol{W}$ afhænger af en ekstra variabel t, kan man ved hjælp af (6.22) opstille formler for differentiation af produkter:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{W}) = \frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{W} + \boldsymbol{V}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}) = \frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}\times\boldsymbol{W} + \boldsymbol{V}\times\frac{\partial\boldsymbol{W}}{\partial t}.$$

Felterne $\partial\boldsymbol{V}/\partial t$ og $\partial\boldsymbol{W}/\partial t$ fås ved koordinatvis differentiation, jf. (1.34).

Anden ordens differentiation

Ved at lade nabla virke to gange kan man danne en række størrelser, af hvilke to dog er identisk nul, fordi $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}$ er nuloperatoren.

Anden ordens differentiation		
Rotation af gradient	$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}f = \boldsymbol{0}$	$k=3$
Divergens af rotation	$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V}) = 0$	$k=3$
Dobbelt rotation	$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V})$	$k=3$
Gradient af divergens	$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V})$	
Divergens af gradient	$\nabla^2 f = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}f$	

I det sidste udtryk indgår den såkaldte *Laplace-operator*

$$\nabla^2 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}; \tag{6.24}$$

den betegnes ofte med Δ. Laplace-operatoren kan også virke på et vektorfelt:

$$\nabla^2 \boldsymbol{V} = \nabla^2 (V_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + V_k \mathbf{e}_k) = \left(\nabla^2 V_1\right) \mathbf{e}_1 + \ldots + \left(\nabla^2 V_k\right) \mathbf{e}_k; \tag{6.25}$$

basisvektorerne er jo *konstante* og kan derfor gå uden for differentiationstegnet. Man har endvidere for den dobbelte rotation

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V}) - \nabla^2 \boldsymbol{V}. \tag{6.26}$$

Dette resultat fås ved anvendelse af formlen (6.23) for det dobbelte vektorprodukt, idet $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ begge oversættes til nabla.

Til listen over anden ordens udtryk kan man føje det andet differential af et skalarfelt (jævnfør afsnittene 3.4 og 3.5) samt differentialet af en divergens.

Eksempel 4. Vi betragter temperaturfeltet $T(\boldsymbol{x}, t)$ i et materiale, hvori der kan foregå varmeledning, men ikke andre former for energitransport. Udgangspunktet er loven om energibevarelse som formuleret i eksempel 12 i afsnit 6.3:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{q} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

hvor nu $\boldsymbol{q}$ er varmestrømtætheden, og u er tætheden af indre energi. Vi vil kun betragte stoffer, for hvilke der erfaringsmæssigt gælder følgende. (1) Varmestrømtætheden er givet ved *Fouriers lov*:

$$\boldsymbol{q} = -\lambda \boldsymbol{\nabla} T,$$

hvor λ er varmekonduktiviteten; og (2) energitætheden er bestemt af temperaturen, således at man har

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Man skriver konventionelt

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T} = \varrho c,$$

hvor ϱ er massetætheden, og c er den specifikke varmekapacitet. Ved indsættelse får man nu

$$\varrho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{q} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (-\lambda \boldsymbol{\nabla} T) = (\boldsymbol{\nabla} \lambda) \cdot \boldsymbol{\nabla} T + \lambda \nabla^2 T.$$

Ofte kan man yderligere regne med, at λ er konstant, altså $\boldsymbol{\nabla} \lambda = \mathbf{0}$, og at λ ikke er nul. I så fald gælder

$$\nabla^2 T = \frac{\varrho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t},$$

der kaldes *varmeledningsligningen*.